Les problèmes pour chercher : peut-on dépasser la mise en activité des élèves ?

HERSANT Magali [(1)]

[(1)] CREN, Nantes Université, INSPÉ, France

Résumé

Cette présentation porte sur les enjeux d'apprentissage que l'on peut associer aux problèmes de type « poules-lapins ». À partir de l'analyse de ressources et de productions d'élèves nous posons le problème de ce que l'on souhaite que les élèves apprennent avec ces problèmes et de ce qui semble possible d'institutionnaliser. Puis, en référence au cadre de l'apprentissage par problématisation, nous effectuons une analyse des problématisations possibles et des savoirs dont on peut viser l'apprentissage et faisons des propositions pour des mises en œuvre en classe.

Mots clés

Problèmes pour chercher ; apprentissage par problématisation ; règle de fausse position ; problèmes de partage inégaux..

Introduction

L'émergence de la didactique des mathématiques et la construction de ses cadres théoriques, en particulier la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) est fortement marquée par un questionnement et une critique curriculaires qui ont conduit à donner aux problèmes un statut d'outil pour la construction de savoirs notionnels à l'École (Hersant, 2021). Mais depuis, la place des problèmes dans l'enseignement des mathématiques en France a évolué. De nombreuses créations institutionnelles (« problèmes pour chercher » ou « pour apprendre à chercher » des documents d'accompagnement de 2002, « démarche d'investigation en mathématiques », « problèmes complexes »…) ont largement modifié la fonction des problèmes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, et ce dès l'école élémentaire.

Les savoirs et connaissances que permettent d'apprendre ces problèmes nouveaux restent peu précisés dans les textes officiels et dans les ressources, ce qui laisse souvent les enseignants seuls face à l'identification des enjeux d'apprentissage et aux choix de mise en œuvre (Hersant, 2008, 2010, 2012). Les travaux montrent que les enseignants ont tendance à se satisfaire de laisser chercher les élèves (par exemple : Choquet, 2014 ou Hersant, 2008). Nous pensons que ce choix de mise en œuvre résulte de la difficulté pour les professeurs des écoles à identifier les savoirs en jeu. Il n'en reste pas moins que cela pose questions : suffit-il de chercher des problèmes pour apprendre à chercher des problèmes ? Tous les élèves tirent-ils profit de la même façon de ces séances ? N'y a t-il vraiment rien à dire aux élèves quant à la résolution de ces problèmes ?

Dans cette communication, nous nous situerons dans le cadre de l'apprentissage par problématisation (Fabre, Orange, 1997 ; Doussot, Hersant, Lhoste, Orange-Ravachol, 2022) et nous limiterons à une catégorie de problèmes présente dans les manuels français ainsi que sur internet, et souvent utilisée à l'école élémentaire, que nous nommons « poules - lapins » bien qu'ils soient présentés sous des habillages variés. On trouve ainsi, assez classiquement, des problèmes « tirelire » analogues ; par exemple (ERMEL, 2002) : « Dans ma tirelire, j'ai 32 pièces et billets. Je n'ai que des pièces de 2 € et des billets de 5 €. Avec ces 32 pièces et billets, j'ai 97 €. Combien y a-t-il de pièces de 2 € et de billets de 5 € dans ma tirelire ? » Ces problèmes mettent en jeu deux inconnues et deux relations qui les lient et se traduisent, de façon experte, par une sytème de deux équations du premier degré. Ainsi, par exemple, le problème : « Dans une basse cour composée de poules et de lapins, on compte 8 têtes et 22 pattes. Combien y'a t'il de lapins et de poules ? » conduit au système des deux équations suivantes (où P désigne le nombre de poules et L le nombre de lapins) : (1) $P+ L= 8$ et (2) $2P + 4L = 22$.

Dans cette communication, nous effectuons d'abord une rapide analyse des propositions de ressources pour ce type de problèmes. Nous proposons ensuite une analyse didactique outillée par un espace de contraintes (Orange, 2000) afin de mettre en évidence les connaissances et savoirs qui peuvent faire l'objet d'une institutionnalisation à l'occasion de la recherche de ce type de problème. Cette analyse est essentiellement épistémologique. Elle nous permettra de mettre en évidence les liens entre les procédures avec schémas et les procédures « expertes » (continuité ou discontinuités) et de préciser ce l'on peut raisonnablement institutionnaliser à l'école élémentaire sur ce type de problèmes qui peut être utile pour la suite de scolarité mathématique. Nous montrerons ainsi qu'à certaines conditions ces problèmes peuvent contribuer à faire évoluer le rapport de tous les élèves à la résolution de problèmes mathématiques, et plus généralement aux mathématiques. Cela nous permettra de revisiter leur place et leur fonction dans le curriculum.

Analyse de quelques ressources et questions

Des ressources diverses fournissent des indications sur les enjeux associés à la résolution de ces problèmes et proposent aux enseignants des pistes pour la mise en œuvre d'une séance consacrée aux problèmes qui nous intéresse.

Les documents d'accompagnement de 2002 (MEN, 2002) qui instituent les « problèmes pour chercher » incluent les problèmes « poules – lapins » dans cette catégorie pour les élèves de CM1 - CM2. D'après ces documents, il est attendu que :

- les élèves utilisent une méthode d'essais et ajustements pour résoudre ces problèmes ou une procédure d'« essais systématiques » ;
- la synthèse du travail avec les élèves mette en évidence « la nécessité de faire des essais et de rectifier les choix en fonction des résultats » et permette, d'une part, de « remarquer combien il faut être méthodique, organisé, qu'il ne faut pas avoir peur d'écrire des résultats provisoires qui peuvent s'avérer inutiles pour la réponse mais en revanche très utiles pour la recherche » et, d'autre part, qu'il « est utile de contrôler sa proposition pour vérifier si elle respecte les contraintes du problème. »

Cette ressource ne mentionne par ailleurs que les essais – ajustements numériques, impliquant des calculs.

Les ressources institutionnelles plus récentes (MENJS, 2021) qualifient ces problèmes de problèmes algébriques – car, à partir du cycle, 4 ils peuvent être résolus par l'écriture et la résolution d'une ou de plusieurs équations du premier degré – et relèvent que ces problèmes atypiques sont la catégorie la plus fréquemment rencontrées en cycle 3. Ces ressources envisagent trois procédures de résolution : essais et ajustements qui correspond à la procédure visées dans les documents d'accompagnement des programmes de 2002, traitement pré-algébrique adossé à un schéma en barre, raisonnement s'appuyant sur les résultats obtenus à partir d'une hypothèse (voir annexe 1).

Si l'on vise avec ces problèmes l'apprentissage de savoirs mathématiques, il convient de s'interroger sur : 1/ les procédures utilisées de façon spontanée par les élèves pour résoudre ces problèmes 2/ ce que les élèves peuvent apprendre concernant les mathématiques à partir de ces problèmes ; 3/ ce que les enseignants peuvent raisonnablement mettre en œuvre dans leur classe pour permettre ces apprentissages à partir des procédures utilisées spontanément par les élèves.

Les procédures erronées utilisées par les élèves du cycle moyen en France sont bien connues : soustraction du nombre de têtes au nombre de pattes pour trouver le nombre de poules ; prise en compte d'une seule des deux relations, le nombre de têtes ou le nombre de pattes ; non respect des caractéristiques des animaux, une poule à trois pattes par exemple ; ils ont globalement une difficulté à prendre en compte l'ensemble des données et à considérer plusieurs relations à la fois (Favier, 2022 ; Zwanch, 2022). Pour ce qui concerne, les procédures qui permettent d'aboutir à la solution, elles sont plus variées que celles présenter dans les ressources institutionnelles. Lorsque les valeurs numériques le permettent, ce qui est souvent le cas pour les classes de la fin de l'élémentaire et le début du collège, des élèves utilisent des procédures sans calcul : à partir des représentations des pattes ou des têtes, ils répartissent les pattes sur les têtes en respectant les contraintes du problème (P+L, deux pattes pour une poule, quatre pour un lapin) ou associent les pattes par paquets de 2 ou 4 en respectant le nombre de têtes, ou encore relient les pattes et les têtes en respectant les caractéristiques des animaux (figure 1). Ils utilisent aussi des procédures d'essais et ajustements-successifs qui, le plus souvent, ne sont pas linéaires (Favier, 2022). Ces stratégies basées sur des hypothèses de départ (il y a autant de lapins que de poules ; il n'y a que des poules ; il y a *p* poules…) correspondent à des tests de solutions potentielles dont les élèves extraient difficilement les régularités essentielles pour la résolution du problème (Favier, 2022).

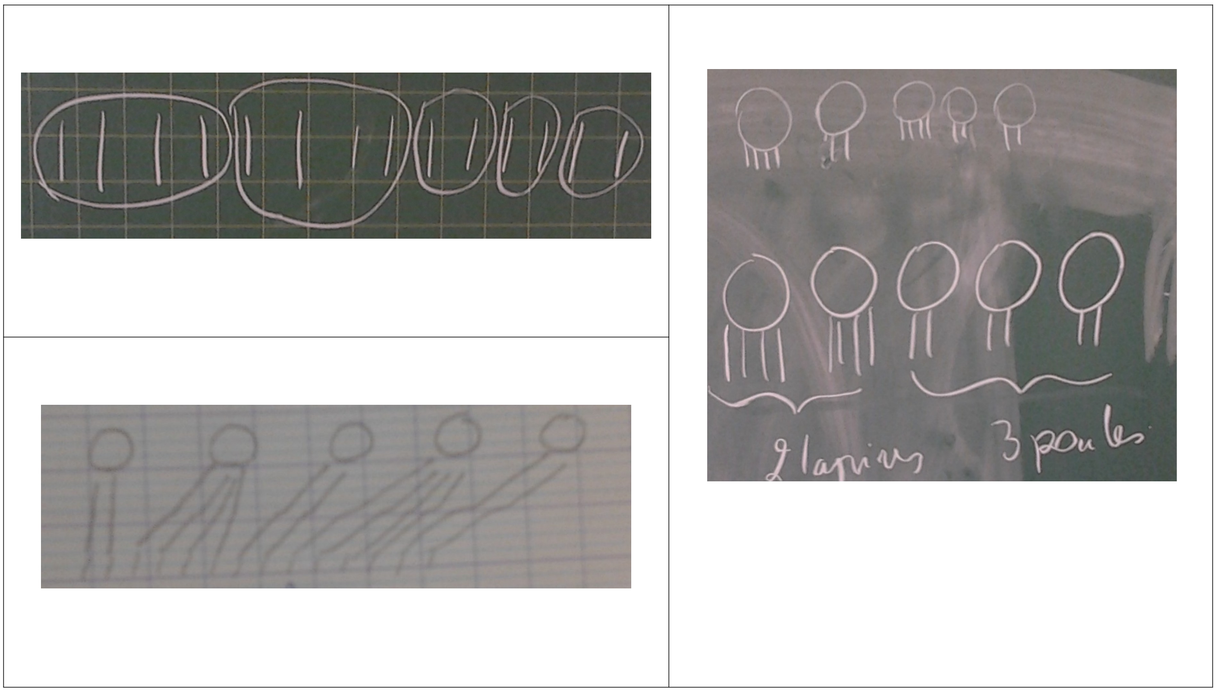


Figure 1 : Utilisation de représentations des pattes et des têtes : répartition des pattes sur les têtes, assemblage des pattes en paquets de 2 ou 4, association des pattes et des têtes (extraits de https://reseau-wallon-garges.ac-versailles.fr/IMG/pdf/Poules_et_lapins_au_cycle_3_retour_sur_experience_bis.pdf).

Les procédure d'essais-ajustements utilisées par les élèves correspondent à la procédure d'essai-ajustement visée par l'institution. Les schématisation utilisées par les élèves s'appuient sur une représentation (discrète) des pattes et des têtes pour constituer, en bon nombre, des lapins ou des poules et semblent se prolonger facilement vers une procédure basée sur l'hypothèse qu'il n'y aurait que des poules, comme en témoignent les productions d'élèves d'une classe de 3è dont voici un extrait de Paulin (2005) :

> « Problème 1 : On sait qu'une poule a deux pattes, un lapin en a quatre. Alors on a dessiné 16 têtes et on a réparti les pattes. Comme une poule a deux pattes et un lapin quatre donc il y a 10 poules et 6 lapins.
>
> Calcul: il y a 20 poules car 10*2=20 et il y a 6 poules car 6*4=24 et comme 20+24=44 donc on a bien 44 pattes
>
> Problème 2 : Tout d'abord on a fait 91*2=182, alors 91 c'est le nombre de poules et le 2 c'est le nombre de pattes. Comme il y a 234 pattes on fait la soustraction 234-182 pour trouver 52 pattes et puis on les a reportées sur les têtes. Donc les poules sont devenues des lapins parce qu'on leur a ajouté de pattes et on a trouvé 234 pattes donc il y a 36 lapins et 45 poules. »

La résolution par un raisonnement déductif s'appuyant une hypothèse pourrait peut-être s'articuler à ces procédures des élèves, même si il y a une différence importante entre les deux raisonnements : dans un cas, il s'agit de faire l'hypothèse qu'il n'y a que des poules pour redistribuer ensuite le nombre de pattes en trop et « transformer les poules en lapins », dans l'autre cas, on considère que le nombre de poules est égal au nombre de lapins et on utilise le fait que si on remplace une poule par un lapin on ajoute 2 pattes.

Le passage des procédures avec schémas (représentation analogique) des élèves à la résolution pré-algébrique avec schéma en barres ne semble par contre pas évident. En particulier, pour cette représentation, il est indiqué qu'un rectangle correspond à un nombre de poules (resp. lapins), comment alors interprété le rapport de un à deux de rectangles pour représenter le nombre de pattes ? Comment aussi savoir qu'il considérer les 4 rectangles sur la droite (et pas seulement deux) ? Comment, au regard du schéma, interpréter l'expression 140 – 80 qui correspond à la soustraction du double du nombre de têtes au nombre de pattes ?

Par ailleurs, on sait que les enseignants ont tendance à se contenter de laisser les élèves chercher en mettant en avant l'importance de faire des essais (Choquet, 2014 ; Hersant, 2008, 2012 ; Favier, 2022) ou à accorder beaucoup de temps à la phase d'appropriation du problème voire à amorcer la représentation du problème, ce qui finalement freine l'entrée dans le problème des élèves puisque la représentation de l'enseignant est souvent très différentes de celle de l'élève (Favier, 2022). Cette écart de représentation empêche aussi l'enseignant d'avoir des régulations adaptées pour aider les élèves dans la résolutions du problème (Favier, 2022).

Finalement, le processus d'institutionnalisation d'une ou plusieurs procédures de résolution semble difficile du fait des multiples procédures et représentations du problème mobilisées par les élèves et de leur écart avec celles des enseignants ou, pour la France, les prescriptions institutionnelles. La difficulté de cette institutionnalisation risque d'empêcher sa réalisation, certains élèves peuvent alors penser que l'essentiel est de chercher ou de faire des dessins, sans chercher à extraire de cette recherche des éléments utiles pour la résolution de problèmes ultérieurs, tandis que d'autres tireront seuls de tels éléments. Ainsi, en l'état actuel, ce type de problèmes nous semble susceptible de générer des phénomènes d'inégalité d'apprentissage.

Les textes institutionnels français nous conduisent, par ailleurs, à interroger les enjeux d'apprentissage associés à ces problèmes lorsqu'ils sont proposés à la fin de l'école élémentaire ou au début du collège, dans le prolongement de nos réflexions antérieures sur le sujet (Hersant, 2010 ; Hersant, 2012). Le texte du MENJS indique en effet que par les problèmes atypiques, il s'agit de

> « développer des compétences transversales, comme l'autonomie, la prise de décisions, la créativité, etc., qui leur seront utiles pour la suite de la scolarité et dans leur vie quotidienne. Elle doit aussi permettre aux élèves de rencontrer un certain nombre de stratégies et de types de raisonnements qu'ils pourront transposer, en les adaptant autant que nécessaire, dans la résolution d'autres problèmes atypiques. »

et précisent aussi qu'« il est crucial de mettre l'accent sur des indices pertinents susceptibles de guider la mémorisation puis l'évocation de ces problèmes. ».

Un autre regard sur ces problèmes et leur mise en œuvre

Dans cette partie de la communication, nous essaierons de dépasser la question des procédures de résolution des problèmes « poules - lapins » pour identifier les apprentissages qu'ils peuvent soutenir dans le domaine des mathématiques. Nous réfléchirons aussi aux mises en œuvre possibles pour cela dans les classes de fin d'école primaire. Pour cela, nous nous situerons dans le cadre de l'apprentissage par problématisation et considérerons non pas la résolution du problème mais le processus de problématisation associé à la recherche de ce problème. Cela nous conduira à dégager les nécessités de ce type de problème en référence à différentes problématisations dans le registre explicatif « arithmétique » et, en particulier, la nécessité « si je remplace une poule par un lapin, le nombre de têtes ne change pas mais j'augmente de 2 le nombre de pattes ». Nous proposerons ensuite des caricatures en appui sur des procédures d'élèves pour amener les élèves à construire ces nécessités.

Références bibliographiques

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Pensée sauvage.

Choquet, C. (2014). *Une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à l'étude de problèmes ouverts au cycle 3.* Thèse de doctorat, Université de Nantes.

Des poules et des lapins. Retour sur une expérimentation. https://reseau-wallon-garges.ac-versailles.fr/IMG/pdf/Poules_et_lapins_au_cycle_3_retour_sur_experience_bis.pdf

Doussot, S., Hersant, M., Lhoste, Y., & Orange-Ravachol, D. (2022). *Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactique.* Presses universitaires de Rennes.

ERMEL, . (2002). *Apprentissage numérique et résolution de problèmes CM2* (Hachette Pédagogie).

Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissement d'obstacles. *ASTER*, *24*, 37-57.

Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève*. Genève.

Hersant, M. (2008). Problèmes pour chercher: des conduites de classes spécifiques. *Grand N*, *81*, 57-75.

Hersant, M. (2010). *Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3* Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches, Université de Nantes. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01777604

Hersant, M. (2012). Recherche et résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques: Une étude didactique pour identifier les savoirs et les apprentissages possibles. In *Les didactiques en questions. Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation* (A. Robert, M. L. Elalouf). De Boeck.

Hersant, M. (2021). Questionnement curriculaire à la lumière de la théorie des situations didactiques: quels apports? quels outils? Cours invité à la 20è école d'été de didactique des mathématiques. In *Nouvelles perspectives en didactique: Le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure. 20è école de didactique des mathématiques.* (Chaachoua, Bessot et al., p. 113-140). La Pensée Sauvage.

Orange, C. (2000). *Idées et raisons.* Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches. Université de Nantes.

Paulin, R. (2005). Des poules, des lapins… et des élèves. https://webusers.imj-prg.fr/~severine.leidwanger/wwwIREM/Deslapins.pdf

Zwanch, K. (2022). Examining middle grades students' solutions to word problems that can be modeled by systems of equations using the number sequences lens. *Journal of Mathematical Behavior*, *66*.

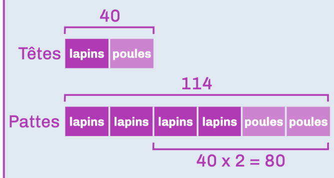
Annexe 1

Comme il y a 40 têtes,
il y a 40 animaux.
On peut commencer par supposer
que la moitié sont des lapins.
40 – 20 = 20

S'il y a 20 lapins, alors il y a 20 poules.
20 x 4 pattes + 20 x 2 pattes =
120 pattes
Le nombre de pattes est alors de 120.
Cela fait trop de pattes ; 20 lapins,
c'est donc trop de lapins.

On recommence en supposant
qu'il y a 15 lapins, etc.

Résolution par traitement pré-	Résolution par un

Résolution par essais-ajustements	algébrique	raisonnement déductif s'appuyant une hypothèse
	Un rectangle foncé représente le nombre de lapins et un rectangle clair le nombre de poules.  Les 4 rectangles sur la droite représentent deux fois le nombre de lapins plus deux fois le nombre de poules, soit 2 x 40. 114 – 80 = 34 34 ÷ 2 = 17 Il y a 17 lapins. 40 – 17 = 23 Il y a 23 poules.	Comme il y a 40 têtes, il y a 40 animaux, on peut commencer par supposer que la moitié sont des lapins. S'il y a 20 lapins, alors il y a 40 – 20 = 20 poules. Le nombre de pattes est alors 20 x 4 pattes + 20 x 2 pattes = 120 pattes. 120 pattes – 114 pattes = 6 pattes Cela fait 6 pattes en trop. En remplaçant un lapin par une poule, cela fait deux pattes en moins. Il faut donc remplacer 3 lapins par 3 poules. Il y a 17 lapins et 23 poules.